EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR, OTRA EPISTEMOLOGÍA DE LA FUNCIÓN DERIVADA

Autor: Eliseo Ramírez Rincón*

1. INTRODUCCIÓN

Entre las complejidades de la Función Derivada se encuentra su lenguaje: la simbología, las representaciones (internas-externas), los contextos de uso y aplicación, las interpretaciones y la relación enseñanza-aprendizaje. De acuerdo con lo anterior es posible estudiar la complejidad de la Función Derivada en cuatro dimensiones: histórica, epistemológica, cognitiva y didáctica. Se aclara que para algunos investigadores como Artigue (1995), solo son tres las dimensiones, porque se considera como una de ellas, la historia y la epistemología. Para este trabajo la historia muestra el camino a la epistemología que no necesariamente es único.

El interés de esta propuesta es evidenciar desde la historia, un camino de otra epistemología no usual de la Función Derivada, y en ese sentido, presentar otras posibles epistemologías del objeto, que favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje, porque la epistemología del objeto puro no necesariamente responde a las necesidades e implicaciones de las relaciones entre el objeto a enseñar y el objeto enseñado. La Didáctica de la Matemática (Europa continental), Matemática Educativa- Educación Matemática (descendencia Anglosajona), hacen referencia a lo mismo; su diferencia es puramente geográfica, Cantoral (2000). La didáctica de la matemática, como ciencia emergente intenta responder entre otras a las preguntas: ¿Qué enseñar? Y ¿Cómo enseñar? y por lo tanto estudia las relaciones establecidas entre la Función Derivada como objeto matemático, la Función Derivada como objeto a enseñar y la Función Derivada como objeto enseñado, sin descuidar el entorno o aspecto cultural en el que se propone, así como tampoco los usos de ésta.

DESARROLLO

Desde 1823, cuando Cauchy definió el objeto función, se han propuesto algunos trabajos respecto de la misma. Sin embargo la mayoría de ellos retoma la definición de Cauchy para su elaboración; es el caso de los trabajos propuestos sobre la Función Derivada por Caratheodory (teoría de funciones de variable compleja, 1954), Fréchet (diferencial total, 1963) y Gâteaux (derivada direccional, 1925, citado por Nicolescu, 1963). Alrededor de estos trabajos se han hecho propuestas sobre la didáctica de la Función Derivada, pero centradas en el pensamiento avanzado del cálculo, aspecto que no beneficia a los estudiantes de los dos primeros semestres de ingeniería o de otras carreras que estudian el cálculo, entre otras razones por la complejidad de éste, por el nivel con el que pasan del colegio a la universidad en cuanto a las ideas previas. Estas propuestas que se han presentado están en el análisis estándar, porque corresponden a la epistemología de Cauchy, en la que el límite como objeto matemático es el que permite estudiar a la Función Derivada y más aún son muy novedosas y ricas en recursos y estrategias en el nivel de pensamiento matemático avanzado, hecho que tampoco favorece el proceso de aprendizaje de un estudiante que apenas está incursionando en el cálculo. De otra parte se encuentran las propuestas que se han hecho en el análisis estándar, pero con otra epistemología, como la hecha por Cantoral (1995), al retomar el trabajo de Lagrange sobre series, evitando así el paso al límite para abordar la Función Derivada. Esta propuesta de Cantoral está en un nivel de pensamiento básico del cálculo y eso permite que sea una alternativa en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Función Derivada con estudiantes de los primeros semestres. En el mismo sentido se puede construir una propuesta en el análisis no estándar con los hiperreales de Robinson (Abraham Robinson, nacionalizado en USA, matemático nacido en la actual Polonia. En la década del 70, propuso los hiperreales, como extensión del conjunto de los reales). Con este enfoque se disminuye el peso del rigor matemático asumido por el lenguaje de la Función Derivada en el análisis estándar, acercando a los estudiantes (mujeres y hombres) “primíparos” a los fundamentos del cálculo desde la intuición, antes que desde el rigor matemático, porque en el proceso natural del ser humano, éste primero aprende a hablar y luego a escribir y no al contrario.

Los hiperreales son una extensión de los números reales que contienen a los números infinitésimos e infinitos que no tienen cabida en los reales (análisis estándar), por lo tanto se cumplen las propiedades de los números reales, y su estructura es más intuitiva que rigurosa, disminuyendo la pesada formulación matemática de la Función Derivada. La siguiente expresión permite mostrar las diferencias entre el análisis estándar y el no estándar, para determinar la continuidad de la Función Derivada *f´(x)* en un punto *(x, y),* y por ende estudiar la diferenciabilidad de la función *f,* en ese punto*.*

- Expresión clásica (análisis estándar):

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0((|x - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon))$$

- Expresión en análisis no estándar: $\forall x\ ((x \cong x_1 \Rightarrow f(x) \cong f(x_1)))$

La expresión no estándar, es más intuitiva y práctica.

En general, los números hiperreales permiten suprimir muchos cuantificadores.

Acosta y Delgado (1994), se basaron en el trabajo que sobre la Función Derivada en los reales realizó Kuhn (1991), a partir de lo hecho por Caratheodory, sobre la Función Derivada de variable compleja. Acosta y Delgado a partir de la idea de Kuhn propusieron la definición para funciones de R^n en R^m, realizando algunas demostraciones y resolviendo algunos ejercicios, donde muestran cómo calcular derivadas utilizando la definición de Caratheodory. Además, establecen la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet (diferencial total,) y Caratheodory. Otra de las definiciones de diferencial es la conocida con el nombre de derivada de Gâteaux o derivada direccional. Se ha demostrado que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero no lo es la afirmación contraria; por lo tanto, debido a la equivalencia entre la derivada de Caratheodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Caratheodory también es diferenciable según Gâteaux.

Estas propuestas, son muy importantes en el desarrollo, construcción y enseñanza del objeto matemático, pero dado su lenguaje riguroso y su compleja red en la que están incrustadas, como propuestas en la enseñanza de la Función Derivada los estudiantes requieren no sólo de las nociones básicas de la Función Derivada, sino también conocimientos de la compleja estructura matemática de ésta; es decir, que estas propuestas pueden ser exitosas en el desarrollo de pensamiento matemático avanzado.

Propuesta

Presentar situaciones didácticas de la Función Derivada, en la elasticidad de las funciones de oferta y demanda resueltas por estudiantes de segundo semestre de contaduría de la universidad Libre, como soluciones posibles de problemáticas concretas que permiten al contador público tomar decisiones y predecir resultados a partir del análisis de fenómenos que presentan regularidades en la oferta y demanda de productos de algunas empresas o productos comerciales.

Discusión

Para plantear y desarrollar la situación propuesta se configuraron libremente siete grupos compuestos de uno a cuatro estudiantes (los estudiantes decidieron), como resultado de la refinación de ideas sobre el trabajo inicialmente planteado. Cada grupo eligió una empresa y un producto, así como también, si el estudio se hacía sobre la elasticidad de la oferta o de la demanda. La situación tuvo un seguimiento aproximado de dos meses desde su etapa de propuesta como idea gruesa, hasta la entrega de un video (cd anexado por grupo) en el que presentaron el trabajo con los aspectos que ellos consideraron destacados. También entregaron un trabajo escrito en el que evidenciaron: justificación, objetivos, marco teórico, situación (oferta-demanda), desarrollo, soporte legal de la recolección de datos, conclusiones y bibliografía.

Para la preparación del trabajo se les aportó material bibliográfico sobre el tema (libro y dos videos), clases magistrales y 3 sesiones clase (diferentes) con cada grupo para identificar las dificultades en cada caso y para avanzar en el desarrollo de la situación propuesta.

En el aspecto matemático de las funciones de oferta y demanda, se tuvo en cuenta la intuición como acercamiento a la formalización de la Función Derivada. El trabajo desarrollado por los estudiantes, evidenció el recorrido intuitivo y en este sentido las situaciones didácticas, se plantearon y desarrollaron, teniendo en cuenta la matemática en el contexto de la economía, desde donde se tomaron los siguientes significados.

1. Oferta: es la curva que está determinada por la relación entre el precio de un bien (p) en el mercado y la cantidad (Q) que producen y venden las empresas, manteniéndose todo lo demás constante (tecnología, precios de las materias primas e insumos, impuestos y subsidios,…).

2. Demanda: es la curva que está determinada por la relación entre el precio (p) y la cantidad (Q) comprada de un bien, cuando todo lo demás se mantiene constante (gustos y preferencias, precios de bienes sustitutivos, renta,…).

3. Equilibrio de oferta y demanda (P): se produce cuando en el mercado están en equilibrio el precio (p) y la cantidad (Q). Este precio y esta cantidad en equilibrio se encuentran en el nivel en que la cantidad ofrecida voluntariamente es igual a la demandada voluntariamente. El equilibrio se halla gráficamente en la intersección de las curvas de oferta y demanda. Al precio de equilibrio no hay escasez ni excedente.

4. Valor marginal de la demanda: dada la curva de demanda (P) de un bien A_1, y asumiendo que están controladas otras variables de la demanda (precios de bienes relacionados, rentas,…), es decir son constantes, se tiene que: $A_1=P(p_1)$ (la cantidad uno es igual a la función de demanda, respecto al precio de la cantidad uno).

El valor marginal expresa la variación de la demanda de un determinado bien con respecto a un incremento en una unidad de su precio, lo que se calcula como la primera derivada de la función. Como la función de demanda es una curva de pendiente negativa (Q´<0), el valor marginal de la demanda siempre será negativo y determina en cuánto disminuye la demanda por cada incremento de una unidad de los precios.

5. Elasticidad-precio de la demanda (E_d): determina la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien a las variaciones de su precio, manteniéndose todo lo demás constante. Su definición exacta “es la variación porcentual de la cantidad demandada dividida por la variación porcentual del precio”.

Luego:

$E_d > 1$ Demanda elástica

$E_d = 1$ Demanda unitaria

$E_d < 1$ Demanda inelástica

La elasticidad de la demanda respecto al precio, se define como

$$\left[E(q,p) = -\frac{p}{d} * d'(p)\right]$$

A partir de este marco conceptual, se definieron la elasticidad para la oferta (E_Q) y la elasticidad para la demanda (E_P), teniendo en cuenta que: la variable independiente en la oferta es el precio y en la demanda es la cantidad demandada, se hizo la siguiente construcción para desarrollar las situaciones.

Q: Representa una cantidad

Q(p): es la función de la oferta respecto al precio

p: es el precio de una cantidad Q

P(Q): es la función de la demanda respecto a una cantidad.

$\overline{P}$: Función de demanda promedio.

Como la recta secante y la recta tangente son de la forma *y=mx+b*, de donde,

m: pendiente recta secante, que pasa por los puntos (Q, P) y (Q_1, P_1), luego

$$m_{sec} = \frac{P_1 - P}{Q_1 - Q} = \frac{P_1 - P}{\Delta Q}, dedonde\ldots \quad m_{sec}\Delta Q = P_1 - P \quad y \quad como \quad también \quad se \quad cumple$$

$$que: \quad P_1 = P + \Delta P, \quad entonces \quad m_{sec}\Delta Q = P + \Delta P - P; \quad luego \quad m_{sec} = \frac{\Delta P}{\Delta Q}$$

$$Ahora \quad si \quad Q \to Q_1 \quad entonces \quad m_{sec} \to m_{\tan} \quad por \quad lo \quad \tan to$$

$$m_{\tan} = P\acute{}dQ = dP \quad de \quad donde \quad se \quad tiene \quad que: \quad \Delta P \cong dP \quad diferencia \cong diferenial$$

$$y \quad por \quad lo \quad \tan to \quad m_{\tan} dQ = P + dP \qquad diferencial \quad también, \quad porque$$

$$\frac{P(Q + \Delta Q) - P(Q)}{\Delta Q} \cong P'(Q), \quad y, \quad P'(Q)\Delta Q + P(Q) = P(Q + \Delta Q) \cong dp + P(Q)$$

De acuerdo con lo anterior las siguientes expresiones de la elasticidad (E) de las funciones de oferta y demanda son equivalentes.

$$\left[E_Q = \left|\frac{\%\Delta Q * 100}{\%\Delta P * 100}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta Q}{Q} * 100}{\frac{\Delta P}{P} * 100}\right| = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}\right| = \left|\frac{P}{Q} * dQ * P\right| = \left|\frac{P}{Q} * Q\acute{}P\right| \right]$$

En este sentido, dadas las relaciones de equivalencia cuando se hace que Q tienda a cero, se tiene que la diferencia $(\Delta Q = dQ)$se aproxima al diferencial.

Teniendo en cuenta el análisis anterior se calculó la elasticidad como una diferencia finita sucesiva, es decir cualquiera de estas expresiones fueron válidas para el trabajo con datos discretos y no agrupados, que además presentaban dispersión distinta de cero.

$$E_{Q,P} = \left|\frac{\%\Delta Q * 100}{\%\Delta P * 100}\right| = \left|\frac{\frac{\Delta Q}{Q} * 100}{\frac{\Delta P}{P} * 100}\right| = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}\right|$$

De otra parte, las funciones de oferta y demanda requieren hallar y fijar los valores mínimos. En la oferta, la cantidad (Q) mínima de un producto que debe ofertar para maximizar las ganancias, y en la demanda el precio (P) mínimo de pago por una mayor cantidad (Q). De acuerdo con esto y con lo anterior se tiene que:

$$promedio: \overline{P(Q)} = \frac{dP}{dQ}, \quad si \quad \overline{P(Q)} \quad tiene \quad un \quad mínimo (1)$$

$$entonces: \quad si \quad Q \to 0, \quad \frac{\Delta P}{\Delta Q} \cong \frac{dP}{dQ} \quad y \quad también \quad \overline{P} \cong P' \cong \frac{dP}{dQ}$$

$$Demostración \quad (1): \quad Como \quad \overline{P(Q)} = \frac{P(Q)}{Q} (definición \quad de \quad promedio)$$

$$\overline{P'(Q)} = \frac{QP'(Q) - P(Q)}{Q} = 0 \quad (información \quad hay \quad un \quad mínimo)$$

$$QP'(Q) = P(Q), \quad de \quad donde \quad P'(Q) = \frac{P(Q)}{Q} = \overline{P(Q)} \quad lo \quad que \quad se \quad quería \quad demostrar.$$

Los trabajos presentados, los desarrollaron los estudiantes con el anterior análisis, con el que después se pudo formalizar en otro tipo de situaciones con las que se podía construir un modelo matemático llamado función.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, E., Delgado, C., (1994) \Fréchet vs Caratheodory", *American Mathematical Monthly*, Vol. 101, No. 2, 4, April.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, Gómez, P. (Ed). pp 97-140. “Una Empresa Docente” & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.

Boyer, C. (1992), *Historia de la Matemática*, versión Española de Mariano Martínez Pérez, Alianza Universidad Textos, Madrid España.

Cantoral, R., Miron, H. (2000), Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, noviembre, año/vol 3, número 003. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, pp. 265-292

Keisler, J., (2007), Elementary Calculus, and infinitesimal approach, second Edition, University of Wisconsin. This work is licensed under the Creative Commons. Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/ or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California, 93405, USA

Caratheodory C., (1954), Theory of Functions of a Complex Variable, Chelsea, New York.

Fréchet, M., (1925), La Notion de differentielle dans l'analyse generale, C. R. Acad. Sci. (Paris), No. 180.

Kuhn S., (1991), The Derivative a la Caratheodory", American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1, January.

Nicolescu L. J., (1963), On Some Properties of the direct second order diferentials in Gateaux Sense", Review Mathematics Pures Appicated, No. 8.