CONCEPCIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA DE LA TASA DE INTERÉS EN UNA ECONOMIA INTERNACIONAL

- Eje temático: Teoría Económica y desarrollo

Miguel Antonio Alba Suárez, docente investigador del Grupo de investigación Gestión, Organizaciones y Sociedad Universidad Libre, miguel.albas@unilibre.edu.co

RESUMEN

El estudio de la tasa de interés ha sido estudiado por muchos economistas, así como financieros que han puesto un viejo debate acerca de la practicidad e interpretación de ésta misma en el mundo de los negocios; si bien es cierto, que cuando se hace lectura de ella se tienen diferentes enfoques, lo que es indiscutible es que cada día juega un papel estructural al entender la dinámica de los mercados

De conformidad con lo anterior la ponencia propuesta pretende romper el paradigma, que la visión financiera y económica de la tasa de interés son concepciones separadas, sino que por el contrario ambas son altamente complementarias y permiten analizar e interpretar la lógica de los negocios sin detrimento de que la una es más importante que la otra.

De otro lado, el análisis que se presenta no es un tratado de la teoría microeconómica ni tampoco de la macroeconómica, tan solo es una exposición de cómo la concepción económica y financiera de la tasa de interés es un instrumento de los negocios que para nada rompe con los conceptos contables y financieros de ella misma.

Se explicita al interior de la ponencia los tópicos de la visión económica y financiera de la tasa de interés visto desde las escuelas del pensamiento económico, para luego contextualizarlo en el mundo de los negocios aplicando la teoría financiera, y por último se concluye que las herramientas de las matemáticas financieras sin una visión de la teoría económica financiera se convierte solamente en un formulismo que no contribuye a interpretar la realidad económica globalizada del mundo de hoy.

Abstract

The interest rate is a reflection of the alternate use of an economy's resources; therefore, individuals are confronted daily with different investment options that make in it the object of study not only by businessmen but academics.

The importance of studying the interest rate lies in the fact that its study was done initially by the economy and subsequently by finance; however, the two approaches are highly complementary, to look at them separately takes away from it when it comes to understanding the dynamics of international financial markets.

This paper theoretically reflects the classical, neoclassical, Keynesian and postkeynesian vision of how the study of the interest rate has been approached and how this vision has created two ways of visualizing the interest rate at the financial level: nominal rate and effective rate.

Key Words: nominal interest rate, effective interest rate, risk, cost of capital, profit

INTRODUCCIÓN:

El estudio de la tasa de interés ha sido estudiado por muchos economistas, así como financieros que han puesto un viejo debate acerca de la practicidad e interpretación de ésta misma en el mundo de los negocios; si bien es cierto cuando se hace lectura de ella se tienen diferentes enfoques, lo que es cierto es que cada día juega un papel estructural al entender la dinámica de los mercados

De conformidad con lo anterior, el presente artículo pretende romper el paradigma, que la visión financiera y económica de la tasa de interés son concepciones separadas, sino que por el contrario ambas son altamente complementarias y que permiten analizar interpretar la lógica de los negocios sin detrimento de que la una es más importante que la otra.

De otro lado, el análisis que se presenta no es un tratado de la teoría microeconómica ni tampoco de la macroeconómica, tan solo es una exposición de cómo la concepción económica y financiera de la tasa de interés es un instrumento de los negocios que para nada rompe con los conceptos contables y financieros de ella misma.

A continuación, se explicita los tópicos de la visión económica y financiera de la tasa de interés visto desde las escuelas del pensamiento económico, para luego contextualizarlo en el mundo de los negocios aplicando la teoría financiera y por último concluir que la herramienta de las matemáticas financieras sin una visión de la teoría económica financiera se convierte solamente en formulismo que no contribuyen a interpretar la realidad económica globalizada del mundo de hoy.

Finalmente el presente trabajo se circunscribe en el proyecto de investigación: Modelo para la estimación del Costo de Capital para las pequeñas y medianas empresas en Colombia del grupo de Investigación: Gestión, Organizaciones y Sociedad de la Universidad Libre de Colombia-sede bosque popular.

1. Concepto clásico de la tasa de interés

La tasa de interés desde el punto de vista clásico y neoclásico se remite a definir la tasa de interés como un instrumento que solamente puede afectar el mercado de bienes y servicios; de tal manera que cualquier desequilibrio que afecte a dicho mercado, es la tasa de interés la que se encarga de corregir ya sea desde el punto de vista de la demanda o de la oferta el insumo de capital (maquinaria y equipo) en el momento en que no se cuenten con los recursos para su desarrollo. (Ospina, G & Torres, A, 2009)

De otra parte, la tasa de interés es considerada como el precio por el costo o el uso del dinero, el cual debe ser administrado por alguien, que después mediante la visión neoclásica se le da el papel a la autoridad monetaria para su desarrollo.

2. Concepto neoclásico de la tasa de interés

La concepción de la tasa de interés desde el punto de vista de la teoría económica es simplemente la definición en primer lugar del concepto de utilidad.

La utilidad desde el punto de vista microeconómico se entiende como la satisfacción que obtiene un consumidor al ingerir o adquirir un bien o un servicio en un tiempo determinado.

La lectura de la utilidad del consumidor se realiza en función de la canasta de bienes y servicios al cual un consumidor temporalmente expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{U = U(C_o, C_{1,}\ C_{2,} C_{3,} C_{4,} \ldots \ldots \ldots C_n\ )}$$

De acuerdo con lo anterior la utilidad del consumidor temporalmente en el tiempo se explicitaría de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{U = U(C_o, C_f\ )}$$

Tabla Nº 1 Concepto de Utilidad en el tiempo

NOMENCLATURA ECONOMICA	CONCEPTO

U	Utilidad
C_o	Consumo hoy= Consumo presente
C_f	Consumo futuro

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la teoría económica, la decisión de consumir hoy o en el futuro está dado por la tasa de interés, la cual se convierte en el premio o castigo por consumir o no consumir. Si bien la teoría neoclásica infiere que la tasa de interés es una variable real y estructural, en las decisiones, la principal restricción que enfrenta un agente económico respecto a su consumo es su ingreso o su presupuesto, que se puede explicitar desde el punto de vista intertemporal de la siguiente manera (Mouliá, P; Lazzari, L & Eriz, M, 2009):

$$\boldsymbol{I}^{1} = \boldsymbol{C_O\, P_O} + \boldsymbol{C_1\, P_1} + \boldsymbol{C_1\, P_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{C_n\, P_n}$$

En la ecuación descrita, el ingreso de un individuo lo distribuye en función de su canasta de bienes y servicios, es decir de su canasta de necesidades a satisfacer.

A nivel temporal el ingreso se distribuye entre consumir hoy o consumir en el futuro

[1] El ingreso o la renta en el tiempo el consumidor la distribuye según la teoría clásica entre consumir el presente y el futuro; de tal manera que su canasta de bienes y servicios se distribuye en el tiempo mediante la adquisición de bienes y servicios en el presente $C_O\, P_O$ y en el futuro por $C_f\, P_f$

$$I^2 = C_O P_O + C_f P_f$$

De otra parte, cuando se continúa analizando la conceptualización de la tasa de interés desde el punto de vista de la teoría neoclásica nos encontramos con el concepto de presupuesto o ingreso, el cual, se convierte desde el punto de vista teórico y práctico en una de las restricciones importantes a la hora de consumir ya sea en el presente como en el futuro.

Tabla Nº 2 Concepto del Ingreso a nivel temporal

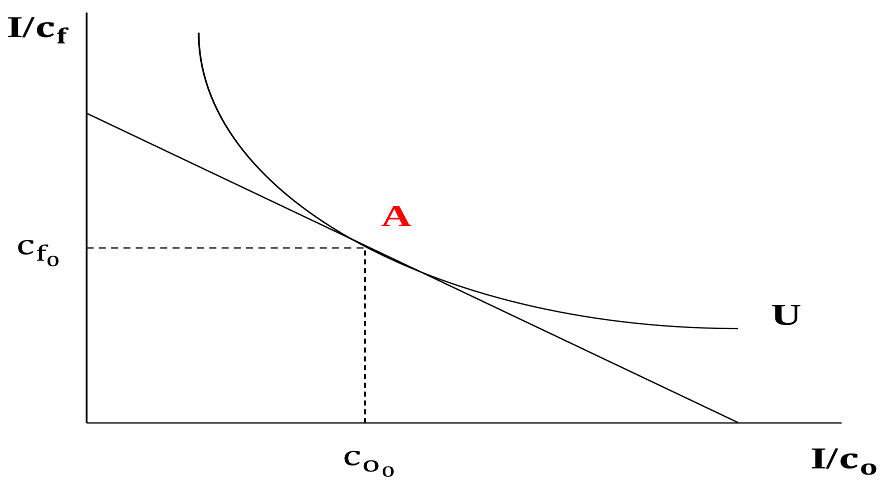
NOMENCLATURA ECONOMICA	CONCEPTO
I	Ingreso
C_o	Consumo hoy= Consumo presente
P_o	Precios de Hoy
C_f	Consumo futuro
P_f	Precio futuro

Fuente: Elaboración propia

Desde el punto de vista gráfico se puede visualizar de la siguiente manera:

Figura Nº 1 Equilibrio del Consumidor

[2] El ingreso o la renta en el tiempo el consumidor la distribuye según la teoría clásica entre consumir el presente y el futuro; de tal manera que su canasta de bienes y servicios se distribuye en el tiempo mediante la adquisición de bienes y servicios en el presente $C_O\ P_O$ y en el futuro por $C_f\ P_f$



Fuente: Elaboración propia

Conforme a la figura anterior, el equilibrio de un consumidor estaría dado temporalmente cuando la curva de indiferencia (escala de preferencias del consumidor) es tangente a la línea presupuestal.

De otro lado los Neoclásicos al abordar la teoría del consumidor expresan que los individuos están en el mercado expuesto a dos efectos principales: efecto ingreso y el efecto sustitución.

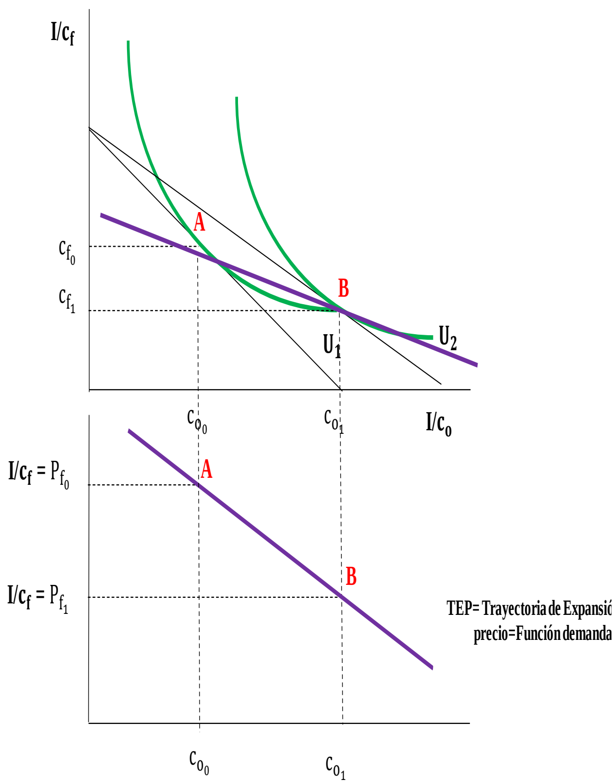
De acuerdo con lo expresado miremos el efecto precio desde el punto de vista de la teoría (Perloff, J & Moreno, Y, 2004):

Primer Caso: El ingreso es constante y los precios son los únicos que varían:

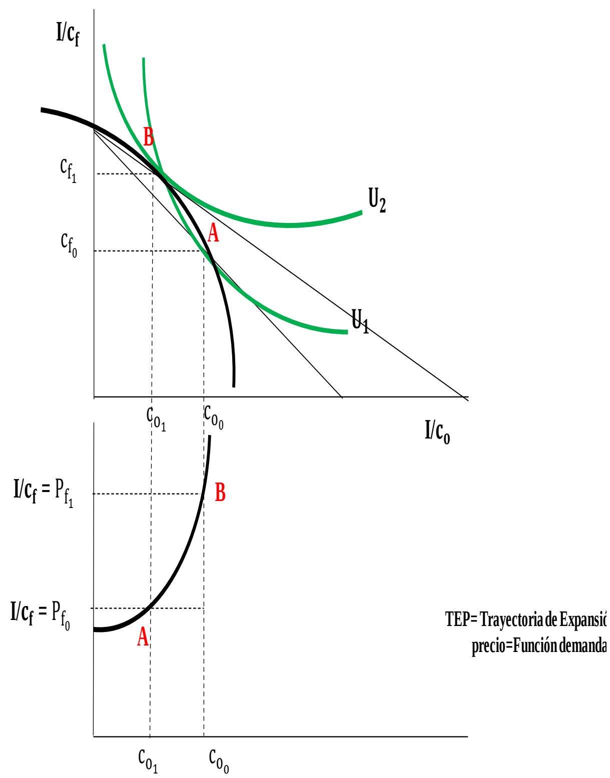
Precio del Futuro= Monto Financiero =(1+r)↓

Figura Nº 2 Trayectoria de Expansión del precio

Primer Caso[3]



Segundo Caso[4]



Fuente: Elaboración propia

Segundo caso= El ingreso es constante y los precios son los únicos que varían:

---

[3] En el caso 1 cuando el precio del consumo futuro baja automáticamente el individuo reacciona aumentando su consumo hacia el presente, dado que las tasas de interés que el visualiza hacia el futuro no lo estimulan para que haga sacrificios de consumo presente, es decir de dejar consumir hoy para hacerlo en el futuro. El desplazamiento del punto A hacia el B es la trayectoria de expansión del precio que explicita las decisiones que toma el individuo dentro de una escala de preferencias

[4] En el caso 2 sucede totalmente lo contrario la trayectoria de expansión del precio cambia su forma al identificar que las expectativas que tienen los individuos en una economía hacia el futuro con respecto al precio futuro (1+r) son mucho más grandes, lo cual, hace que la conducta de los agentes se inicie en aplazamientos del consumo de hoy para darle paso al ahorro con miras a obtener un consumo futuro más grande

Precio del Futuro= Monto Financiero =(1+r)

En la figura anterior, la toma de decisiones que es más conveniente entre consumir en el presente ó consumir en el futuro está dado implícitamente por el comportamiento de los precios que es última la expresión de la tasa de interés.

Utilizando como herramienta el cálculo diferencial se puede explicitar la toma de decisiones que hacen las personas en su canasta de bienes y servicios a nivel temporal de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{I = C_O P_O + C_f P_f}$$

La función de utilidad de un consumidor a nivel temporal viene definida de la siguiente manera (Caloca, R & Leriche, C, 2011) :

$$\boldsymbol{U = U(C_O, C_f)}$$

$$\boldsymbol{dU}^{5} \boldsymbol{= 0}$$

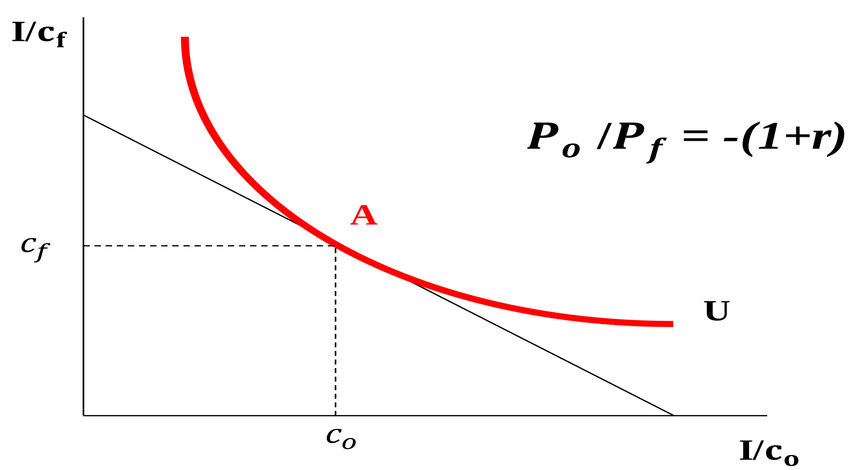
[5] La derivada de la función de utilidad igual a cero significa que el consumidor se mueve temporalmente en la misma curva de indiferencia

$$\mathbf{0}^{6} = \left(\frac{\partial U}{\partial C_O}\right) dC_O \ + \left(\frac{\partial U}{\partial C_f}\right) dC_f$$

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial C_O}\right) dC_O = \left(\frac{\partial U}{\partial C_f}\right) dC_f$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial C_O}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial C_f}\right)} = \frac{dC_f}{dC_O} = -\frac{P_O}{P_f} = -(1+r)$$

Figura Nº 3 La expresión del equilibrio: La razón de los precios



Fuente: Elaboración propia

[6] Al igualar la función de utilidad a cero, lo que el consumidor se cuestiona, es que le pasaría a su nivel de utilidad si decide maximizar su nivel de utilidad en el presente o que le pasaría a su nivel de utilidad si decide maximizar su nivel de utilidad en el futuro

Resultado de las figuras anteriores, se puede decir la razón de los precios tanto presente como futuro desde el punto de vista de la teoría neoclásica, no es más que la expresión de las decisiones que deben tomar los individuos cuando se enfrentan a la tasa de interés.

2.1 Concepto keynesiano y postkeynesiano de la tasa de interés

La tasa de interés para la teoría económica Keynesiana y postkeynesiana es un fenómeno estrictamente monetario y no real como lo expresaba la teoría clásica y neoclásica.

La tasa de interés es concebida bajo la teoría keynesiana como la remuneración que reciben los individuos al desprenderse de la liquidez; fenómeno que, tiene que ver con el uso del dinero.

Cuando la teoría Keynesiana examina la tasa de interés la traslada directamente a explicar el comportamiento del mercado monetario; sin embargo, ésta considera que su desempeño dentro del mercado debe estar regulado por la autoridad monetaria, de tal manera que una disminución de ella contribuya aumentar la inversión, y por consiguiente la demanda agregada (Montoya, 2009).

3. Visión financiera de la tasa de interés

La visión financiera de la tasa de interés presenta dos enfoques: modelo consumo hoy y modelo consumo más tarde.

- **Modelo consumo hoy:** El modelo consumo hoy parte de la premisa que los intereses se consumen o se pagan en el periodo. Veamos a continuación el modelo hoy a través de un ejemplo:

Tabla Nº 3 Modelo Consumo hoy

VISION	MODELO CONSUMO HOY

P=100

r= 2% mensual
n= 3 meses

n	Co: Consumo de Hoy	Intereses Causados	Intereses pagados	Cf =Consumo futuro
0	100,00	-	-	
1	100,00	2	2	
2	100,00	2	2	
3	100,00	2	2	106,00

Cf= Co + Algo (Interés)

Cm= 100+6= $106,00
Co= Consumo hoy, Cf= Consumo futuro

r= I/Co

r= 6/100= 6% trimestral

VISION	**MODELO CONSUMO HOY**
ENFOQUE FINANCIERO	**TASA NOMINAL**
ENFOQUE MATEMATICO	**PROPORCION** Multiplicación y División (* y /)

Fuente: Elaboración propia

En el cuadro se puede observar que el modelo consumo hoy utiliza como enfoque financiero el concepto tasa nominal que es definida financieramente como la tasa de referencia ó la tasa del negocio.

El concepto matemático asociado es la proporción (* /)

En el modelo consumo hoy los intereses se causan y se registran en el periodo no generándose procesos de capitalización debido a que en este sistema los intereses se cancelan dentro del período no dando lugar a procesos de reinversión.

- **Modelo consumo más tarde:** El modelo consumo más tarde utiliza el concepto de equivalencia ó capitalización de los intereses; para tal efecto a continuación se explicita el modelo de la siguiente manera:

Tabla Nº 4 Modelo Consumo Futuro o más tarde

VISION	**CONSUMO MAS TARDE**

P=100

r= 2% mensual

n= 3 meses

n	P	intereses causados	Abono a Capital	F
0	100,00	-	-	100,00
1	100,00	2	2	102,00
2	100,00	2,04	2,04	104,04
3	100,00	2,08	2,08	106,12

F=P + I

F= 100+6,12= $106,12

r= I/P

r= 6,12/100= 6,12% trimestral

ENFOQUE FINANCIERO	**TASA EFECTIVA**
	EQUIVALENCIA

ENFOQUE MATEMATICO	Potenciación (^)

Fuente: Elaboración propia

El enfoque del modelo consumo más tarde se basa en el concepto financiero: capitalización de los intereses, que no es más que la expresión de la Tasa efectiva cuya característica matemática se basa en el concepto de potenciación (^) tal como se refleja en el recuadro anterior

En el enfoque descrito se puede visualizar que el 2% es equivalente el 6,12% trimestral y no al 6% trimestral, ya que, el 6% maneja como concepto financiero la proporción-tasa nominal-, mientras que el modelo consumo más tarde maneja el concepto potenciación o equivalencia en términos financieros.

El modelo consumo más tarde explicita el principio de capitalización atado al concepto abono de interés, que es el carácter diferenciador en el modelo consumo hoy que explicita el pago de intereses mediante su cancelación.

3.1 EQUIVALENCIA DE TASAS DE INTERES BAJO EL SILOGISMO ECONOMICO:

Encontrar la tasa equivalente del 24% MV (mes vencido) a MA (Trimestre anticipado)

La tasa del 24% MV es una tasa nominal que liquida o capitaliza intereses mensualmente; por lo tanto. la tasa que se desea buscar es la tasa periódica ó la tasa contable o la tasa de registro, la cual se calcula de la siguiente manera:

r= (0.24/360)*30)= 0.02 ó 2%

r= TASA DE REGISTRO EN LIBROS

La tasa de interés siempre viene anualizada, por lo tanto se requiere dividirla por un año con el fin de determinar la tasa diaria, y encontrar la tasa periódica para los 30 días, que en este caso es del 2% mensual. Una vez determinada la tasa, el contador procede a registrar en sus libros la tasa del 2% mensual, más no la tasa del 24% MV, debido a que es la tasa de negociación:

Al determinar la tasa de registro podemos efectuar el siguiente silogismo económico elaborando un flujo de caja:

Si una persona solicita un crédito bancario hoy es decir (Consumo hoy), la entidad financiera le desembolsa el dinero y al finalizar el período tendrá que desembolsar el causante más los intereses (1+ algo)

El silogismo se construye de la siguiente manera:

Situación inicial vencida 1 ⟶ 1.02

Situación hipotética anticipada ⟶ 1

Conforme al silogismo se puede ver, que al adquirir un crédito bajo la modalidad vencida, al finalizar el período necesariamente se debe cancelar el capital más los intereses; pero si el crédito se solicita bajo la modalidad anticipada, la pregunta sería ¿cuánto es el dinero que la entidad financiera desembolsa si otorga un crédito bajo la modalidad anticipada? La respuesta sería la siguiente:

Si por cada peso ($1.oo) que se debe desembolsar a una tasa del 2% mensual, se debe cancelar al vencimiento ($ 1.02) vencido, anticipadamente significaría (1/1.02) es decir que, si la entidad desembolsará mensualmente anticipadamente entregaría a su deudor ($ 0.9803), lo cual implicaría por concepto de interés 1.97% (1-0.9803)

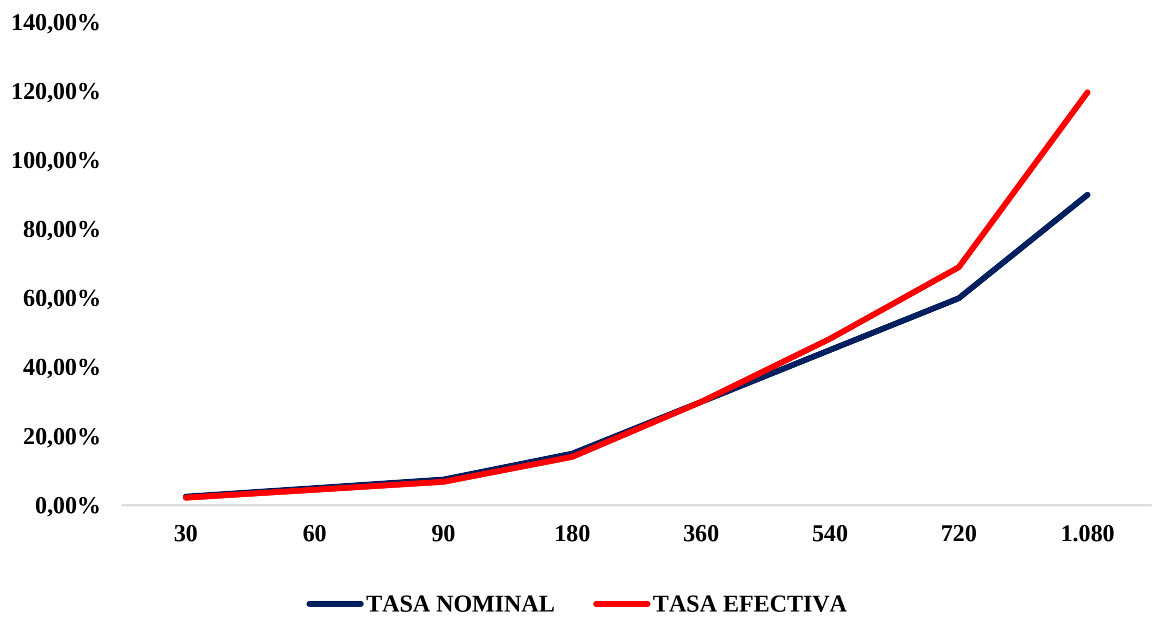
La tasa nominal para un interés del 1,97% anticipada sería la siguiente:

$$\frac{0.0197*360}{30} = 23.64\%\ \text{T.A}$$

3.1.1 DIFERENCIACION ENTRE LA TASA EFECTIVA Y TASA NOMINAL

En la siguiente se puede observar la diferencia entre la tasa efectiva y nominal de la siguiente manera:

Figura Nº 5 Tasa Nominal Vs Tasa Efectiva



Fuente: Elaboración propia

Que la tasa para periodos iguales a un año la tasa efectiva es igual a la tasa nominal; para periodos menores a un año la tasa nominal es mayor que la tasa efectiva; y para periodos mayores a un año la tasa efectiva es mayor que la tasa nominal.

4. APLICACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS EN LAS TABLAS DE AMORTIZACIÓN:

A continuación, se explicitan los diferentes planes de amortización de acuerdo con la tasa de interés

Modelo 1 Abonos constantes de capital

Este modelo es el más sencillo y popular de todos. Veamos un ejemplo

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

En la tabla de amortización se visualizaría de la siguiente manera:

Tabla N° 5 Abonos constantes de capital

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	27.000,00	2.000,00	25.000,00	75.000,00
2	26.500,00	1.500,00	25.000,00	50.000,00
3	26.000,00	1.000,00	25.000,00	25.000,00
4	25.500,00	500,00	25.000,00	0
	105.000,00	5.000,00	100.000	

Fuente: Elaboración propia

El valor de cualquier A_j puede ser calculado fácilmente de la siguiente manera:

$$A_j = \frac{P}{n} \ + Pi\left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \quad (1)$$

Así, por ejemplo, aplicando la ecuación No 1 al caso anterior, obtenemos lo siguiente:

$$A_4 = \frac{100.000}{4} \ + 100.000(0.02)\left(1 - \frac{4-1}{4}\right)$$

= 25.500 tal como se ve en el cuadro de amortización

La fórmula resulta del siguiente razonamiento

El primer abono es $\frac{P}{n}$, y los intereses del principal hasta el momento del primer abono son Pi; por lo tanto $A_1 = \frac{P}{n} \quad + Pi$

$$A_2 = \frac{P}{n} \quad + \left(P - \frac{P}{n}\right) i$$

$$A_2 = \frac{P}{n} \quad + Pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$A_3 = \frac{P}{n} \quad + \left(P - \frac{2P}{n}\right) i$$

$$A_3 = \frac{P}{n} \quad + Pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$A_4 = \frac{P}{n} \quad + \left(P - \frac{3P}{n}\right) i$$

$$A_4 = \frac{P}{n} \quad + Pi\left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

Ahora, si se observamos la evolución de los términos, se puede obtener

$$A_j = \frac{P}{n} \quad + Pi\ \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)$$

Modelo 2 Cuotas constantes

Este modelo, se diferencia del anterior, en que las cuotas permanecen constantes, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

La tabla de amortización sería el siguiente:

Tabla N° 6 Modelo cuotas constantes

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	26.262,38	2.000,00	24.262,38	75.737,62
2	26.262,38	1.514,75	24.747,63	50.989,99
3	26.262,38	1.019,80	25.242,58	25.747,41
4	26.262,38	514,95	25.747.43	-0,02
	105.049,52	5.049,50	100.000,02	

Fuente: Elaboración propia

El valor de cuota constante *A* se obtuvo de la siguiente manera:

$$A = \frac{100.000(0{,}02)(1 + 0{,}02)^4}{(1 + 0{,}02)^4 \ - 1}$$

$$A = 26.262{,}38$$

La aplicación de la fórmula se obtuvo del siguiente racionamiento

Tabla N° 7 Descripción del Plan de Cuotas Constantes temporalmente

P	*A*	*A*	*A*	………	*A*	*A*	*A*	*A*
0	1	2	3		*n-3*	*n-2*	*n-1*	*n*

Fuente: Elaboración propia

Vemos en la tabla que, al cabo del primer período, el principal P se convierte en

$$P + Pi = P(1 + i)$$

Al cabo de dos períodos es $= P(1 + i) + P(1 + i)i$

$$= P(1 + i)(1 + i)$$

$$= P(1 + i)^2$$

Al cabo de tres períodos es $= P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 i$

$$= P(1 + i)^2(1 + i)$$

$$= P(1 + i)^3$$

Y similarmente, al cabo de *n* períodos es $P(1+i)^n$. De acuerdo con lo anterior, en el punto *n* de la tabla anterior, lo que empezó siendo P en el punto 0 vale ahora $P(1+i)^n$; y tenemos una serie de anualidades $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots \ldots \ldots . A_n$, cuya suma en el punto *n* también equivalga a $P(1+i)^n$, es decir que extinga la deuda.

De acuerdo con la tabla No 7, podemos deducir lo siguiente:

$$A_1 \ vale \ A(1+i)^{n-1}$$

$$A_2 \ vale \ A(1+i)^{n-2}$$

$$A_3 \ vale \ A(1+i)^{n-3}$$

Y así sucesivamente hasta

$$A_{n-2} \ que \ vale \ A(1+i)^{n-(n-2)}$$

$$= A(1+i)^2$$

$$A_{n-1} \ que \ vale \ A(1+i)^{n-(n-1)}$$

$$= A(1+i)$$

Y

$$A_n \ que \ vale \ A(1+i)^0$$

$$= A$$

La suma de todas las Aes es:

$$A \quad +A(1+i) \quad +A(1+i)^2 \quad +\ldots\ldots+ \quad A(1+i)^{n-3}+ \quad A(1+i)^{n-2}+ \quad A(1+i)^{n-1}$$

$$= A\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots \ldots . . +(1+i)^{n-3} + \ (1+i)^{n-2} + \ (1+i)^{n-1}\,]$$

Ahora bien la serie 1, $(1+i), (1+i)^2, \ldots \ldots . . (1+i)^{n-1}$ es una serie geométrica de *n* términos, cuyo primer término es 1, y cuya razón es $(1+i)$. Se sabe que por +algebra que la suma *S* de una serie geométrica de *n* términos, cuyo primer término es *A* y cuya razón es *r*, es:

$$S = \frac{A(r^n - 1)}{r - 1}$$

Y por lo tanto nuestra serie suma:

$$= \frac{1[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

O sea que la suma de todas las Aes es:

$$\frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Está expresión debe equivaler, como se expresó anteriormente a $P(1+i)^n$:

$$\frac{A[(1+i)^n-1]}{i} = P(1+i)^n$$

De donde:

$$A = \frac{Pi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Modelo 3 Cuota creciente aritméticamente

Cuota creciente aritméticamente, significa que cada cuota es igual a la anterior más un porcentaje fijo de la primera cuota. Este porcentaje es denominado: “factor de crecimiento”, que designamos con la letra *d*

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

$$d = 10\%$$

La tabla de amortización sería el siguiente:

Tabla N° 8 Modelo cuota creciente aritméticamente

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
1	22.886,10	2.000,00	20.886,10	79.113,90
2	25.174,71	1.582,28	23,592,43	55.521,47
3	27.463,32	1.110,43	26,352,89	29.168,58
4	29.751,93	583,37	29.168.56	0,02
	105.276,06	5.276,08	99.999,98	

Fuente: Elaboración propia

Puede observarse que, efectivamente, las cuotas son crecientes y que el crecimiento equivale a 22.886,10 x 0,10 = 2.288,61, como lo pide el plan

Cualquier A_j se obtiene de:

$$A_j = \frac{Pi\ (1+i)^n[1+(j-1)d]}{[(1+i)^n - 1] + d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

En nuestro ejemplo tenemos que:

$$A_1 = \frac{100.000(0.02)\ (1+0.02)^4[1+(1-1)0.10]}{[(1+0.02)^4 - 1] + 0.10\left[\frac{(1+0.02)^4 - 1}{0.02} - 4\right]}$$

$$A_1 = 22.886{,}10$$

A_2, A_3 y A_4 se pueden calcular agregando cada vez 2.288,61; o bien directamente por la fórmula anterior, por ejemplo

$$A_4 = \frac{100.000(0.02)\ (1+0.02)^4[1+(4-1)0.10]}{[(1+0.02)^4-1]+0.10\left[\frac{(1+0.02)^4-1}{0.02}-4\right]}$$

$$A_4 = 29.751,94$$

Veamos ahora con la derivación de la ecuación No 3. El planteamiento general es mismo del modelo No 2, con la diferencia de que *A* no es constante sino creciente a razón de *dA* por período.

Tabla N° 9 Factor de crecimiento modelo cuota creciente aritméticamente

P	*A*	*(A+ dA)*	....	*A+(n-2)dA*	*A+(n-1)dA*
0	1	2		*n-1*	*n*

Fuente: Elaboración propia

Vemos que en el punto *n*:

$$A_1 = A(1+i)^{n-1}$$

$$A_2 = (A+dA)(1+i)^{n-2}$$

$$A_3 = (A+2dA)(1+i)^{n-3}$$

$$A_4 = (A + 3dA)(1 + i)^{n-4}$$

Y así hasta el final

$$A_{n-1} = [A + (n-2)dA](1 + i)^{n-(n-1)}$$

$$A_{n-1} = [A + (n-2)dA](1 + i)$$

$$A_n = [A + (n-1)dA](1 + i)^0$$

$$A_n = [A + (n-1)dA]$$

Ahora descomponemos la serie de las Aes en *n*-partes y producimos *n*-series horizontales como se puede visualizar de la siguiente manera:

Tabla N° 10 Deducción matemática modelo cuota creciente aritméticamente

Serie	A_1 +	A_2+	A_3+	+….+	A_{n-1} +	A_n
1	$A(1+i)^{n-1}$	$A(1+i)^{n-2}$	$A(1+i)^{n-3}$		$A(1+i)$	$A(1+i)^0$
2		$dA(1+i)^{n-2}$	$dA(1+i)^{n-3}$		$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$
3			$dA(1+i)^{n-3}$		$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$
…..					…………	…………
n-1					$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$
n						$dA(1+i)^0$

Serie	$A_1 +$	A_2+	A_3+	+….+	$A_{n-1} +$	A_n
	$A(1+i)^{n-1}$ +	$(A+dA)(1+i)^{n-2}$+	$(A+2dA)(1+i)^{n-3}$+	+….+	[A+(n-2) dA](1+i) + [A+(n-1) dA] $(1+i)^0$	

Lo que quiere decir que la suma de las n-series horizontales es exactamente igual a la suma de la serie original. Sumamos las series horizontales y obtenemos:

$$Serie\ 1 = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$Serie\ 2 = \frac{dA[(1+i)^{n-1} - 1]}{i}$$

$$Serie\ 3 = \frac{dA[(1+i)^{n-2} - 1]}{i}$$

Y así sucesivamente hasta:

$$Serie_{n-1} = \frac{dA[(1+i)^2 - 1]}{i}$$

$$Serie_n = \frac{dA[(1+i)^1 - 1]}{i}$$

Ahora sumamos las sumas de todas las series y obtenemos:

$$\frac{A[(1+i)^n-1]}{i}+\frac{dA}{i}[(1+i)^{n-1}-1+(1+i)^{n-2}-1+\cdots.+(1+i)^2-1+(1+i)-1]$$

En el extremo derecho del [ ] agregamos +1 +1 y obtenemos que la expresión anterior equivale a:

$$\frac{A[(1+i)^n-1]}{i}+\frac{dA}{i}[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots.+(1+i)^2+(1+i)+1-n]$$

$$=\frac{A[(1+i)^n-1]}{i}+\frac{dA}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]$$

$$=\frac{A}{i}[[(1+i)^n-1]+d\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]]$$

Esta expresión, que es la suma de la serie original, debe equivaler en el punto *n* a $P(1+i)^n$:

$$\frac{A}{i}[[(1+i)^n-1]+d\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]]=P(1+i)^n$$

De donde

$$A_j=\frac{Pi\,(1+i)^n}{[(1+i)^n-1]+d\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]}$$

Que es el valor de A_1

A_2 sería $A+dA=A(1+d)$

A_3 sería $A(1+d)+dA$

$$= A(1+d+d)$$

$$= A(1+2d)$$

Y, en general,

$$A_j = a[1+(j-1)d]$$

Sustituyendo aquí el valor de A obtenido atrás, tenemos finalmente

$$A_j = \frac{Pi\,(1+i)^n[1+(j-1)d]}{[(1+i)^n-1]+d\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]}$$

Modelo 4 Cuotas decrecientes aritméticamente

Este plan es exactamente el inverso del plan anterior con los mismos datos:

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

$$d = 10\%$$

El cuadro de amortización sería el siguiente:

Tabla N° 11 modelo cuota decreciente aritméticamente

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	30.807,21	2.000,00	28.807,21	71.192,79
2	27.726,49	1.423,86	26.302,63	44-890,16
3	24.645,77	897,80	23.747,97	21.142,19
4	21.565,05	422,84	21.142,21	-0,02
	104.744,52	4.744,50	100.000,02	

Fuente: Elaboración propia

Puede observarse que, efectivamente, las cuotas son decrecientes, y que decrecen a razón de 30.807,21 x 0,10 = 3.080,72, como lo pide el plan

Cualquier A_j se obtiene de:

$$A_j = \frac{Pi\,(1+i)^n[1-(j-1)d]}{[(1+i)^n-1]-d\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]}$$

En nuestro ejemplo tenemos que:

$$A_1 = \frac{100.000(0.02)\,(1+0.02)^4[1-(1-1)0.10]}{[(1+0.02)^4-1]-0.10\left[\frac{(1+0.02)^4-1}{0.02}-4\right]}$$

$$A_1 = 30.807{,}21$$

$A_2, A_3 \; y \; A_4$ se pueden calcular restando cada vez 3.080,72; o bien directamente por la fórmula anterior, por ejemplo

$$A_4 = \frac{100.000(0.02)\;(1+0.02)^4[1-(4-1)0.10]}{[(1+0.02)^4-1]-0.10\left[\frac{(1+0.02)^4-1}{0.02}-4\right]}$$

$$A_4 = 21.565{,}04$$

Vamos ahora con la derivación de la ecuación No 4. El planteamiento general es mismo del modelo No 2, con la diferencia de que *A* no es constante sino decreciente a razón de *dA* por período.

Tabla N° 12 Factor de crecimiento modelo cuota decreciente aritméticamente

P	*A*	*(A- dA)*	....	*A-(n-2)dA*	*A-(n-1)dA*
0	1	2		*n-1*	*n*

Fuente: Elaboración propia

Vemos que en el punto *n*:

$$A_1 = A(1+i)^{n-1}$$

$$A_2 = (A - dA)(1+i)^{n-2}$$

$$A_3 = (A - 2dA)(1+i)^{n-3}$$

$$A_4 = (A - 3dA)(1+i)^{n-4}$$

Y así hasta el final

$$A_{n-1} = [A - (n-2)dA](1+i)^{n-(n-1)}$$

$$A_{n-1} = [A - (n-2)dA](1+i)$$

$$A_n = [A - (n-1)dA](1+i)^0$$

$$A_n = [A - (n-1)dA]$$

Ahora descomponemos la serie de las Aes en *n*-partes y producimos *n*-series horizontales como se puede visualizar de la siguiente manera:

Tabla N° 13 Deducción matemática modelo cuota decreciente aritméticamente

Serie	A_1 +	A_2+	A_3+	+….+	A_{n-1} +	A_n
1	$A(1+i)^{n-1}$	$A(1+i)^{n-2}$	$A(1+i)^{n-3}$		$A(1+i)$	$A(1+i)^0$
2		$dA(1+i)^{n-2}$	$dA(1+i)^{n-3}$		$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$
3			$dA(1+i)^{n-3}$		$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$

Serie	A_1 +	A_2+	A_3+	+….+	A_{n-1} +	A_n
…..					…………	…………
n-1					$dA(1+i)$	$dA(1+i)^0$
n						$dA(1+i)^0$
	$A(1+i)^{n-1}$ +	$(A-dA)(1+i)^{n-2}$+	$(A-2dA)(1+i)^{n-3}$+	+….+	[A-(n-2) dA](1+i) + [A-(n-1) dA] $(1+i)^0$	

Fuente: Elaboración propia

Lo que quiere decir que la suma de las n-series horizontales es exactamente igual a la suma de la serie original. Sumamos las series horizontales y obtenemos

$$Serie\ 1 = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$Serie\ 2 = \frac{dA[(1+i)^{n-1} - 1]}{i}$$

$$Serie\ 3 = \frac{dA[(1+i)^{n-2} - 1]}{i}$$

Y así sucesivamente hasta:

$$Serie_{n-1} = \frac{dA[(1+i)^2 - 1]}{i}$$

$$Serie_n = \frac{dA[(1+i)^1 - 1]}{i}$$

Ahora sumamos las sumas de todas las series y obtenemos:

$$\frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} - \frac{dA}{i}[(1+i)^{n-1} - 1 + (1+i)^{n-2} - 1 + \cdots . +(1+i)^2 - 1 + (1+i) - 1]$$

En el extremo derecho del [ ] agregamos +1 +1 y obtenemos que la expresión anterior equivale a:

$$\frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} - \frac{dA}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots . +(1+i)^2 + (1+i) + 1 - n]$$

$$= \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} \text{-} \frac{dA}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$= \frac{A}{i}[[(1+i)^n - 1] \text{-}\ d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]]$$

Esta expresión, que es la suma de la serie original, debe equivaler en el punto *n* a $P(1+i)^n$:

$$\frac{A}{i}[[(1+i)^n - 1] \text{-}\ d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]] = P(1+i)^n$$

De donde

$$A_j = \frac{Pi\ (1+i)^n}{[(1+i)^n - 1] - d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

Que es el valor de A_1

$$A_2 \text{ sería } A - dA = A(1-d)$$

$$A_3 \text{ sería } A(1-d) + dA$$

$$= A(1-d-d)$$

$$= A(1-2d)$$

Y, en general,

$$A_j = a[1-(j-1)d]$$

Sustituyendo aquí el valor de A obtenido atrás, tenemos finalmente

$$A_j = \frac{Pi\,(1+i)^n[1-(j-1)d]}{[(1+i)^n - 1] - d\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

Modelo 5 cuota creciente geométricamente

En este modelo radica que las cuotas no crecen en un porcentaje fijo, sino que lo realizan en función del porcentaje anterior.

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

$$d = 10\%$$

La tabla de amortización sería la siguiente:

Tabla N° 14 modelo cuota creciente aritméticamente

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	22.688,46	2.000,00	20.688,46	79.311,54
2	24.957,31	1.586,23	23.371,08	55.940,46
3	27.453,04	1.118,81	26.334,23	29.606,23
4	30.198,35	592,12	29.606,23	-0,02
	105.297,16	5.297,16	100.000,00	

Fuente: Elaboración propia

En la tabla se observa que, efectivamente cada cuota es la suma de la anterior más el factor de crecimiento 0.10 de la misma. La fórmula para obtener cualquier cuota es:

$$A_j = \frac{P(d-i)(1+d)^{j-1}}{\left(\frac{1+d}{1+i}\right)^n - 1}$$

De acuerdo con el ejemplo la primera cuta se estimaría de la siguiente manera:

$$A_1 = \frac{100.000(0.10-0.02)(1+0.10)^{1-1}}{\left(\frac{1+0.10}{1+0.02}\right)^4 - 1}$$

$$A_1 = 22.688{,}46$$

$$A_2 = 22.688{,}46 + 0.10(22.688{,}46) = \quad 24.957{,}31$$

$$A_3 = 24.957{,}31 + 0.10(24.957{,}31) = \quad 27.453{,}04$$

$$A_4 = 27.453{,}04 + 0.10(27.453{,}04) = \quad 30.198{,}34$$

De otro lado, se puede también obtener directamente el valor de cualquier A_j usando la fórmula de la siguiente manera:

$$A_1 = \frac{100.000(0.10 - 0.02)(1 + 0.10)^{4-1}}{\left(\frac{1 + 0.10}{1 + 0.02}\right)^4 - 1}$$

$$A_4 = 30.198{,}34$$

Ahora examinemos como se deriva la fórmula anterior

$$A_1 = A_1(1 + i)^{n-1}$$

$$A_2 = (A_1 + dA_1)(1 + i)^{n-2}$$

$$A_2 = A_1(1 + d)(1 + i)^{n-2}$$

$$A_3 = = [\ A_1(1 + d) + A_1(1 + d)d]\ (1 + i)^{n-3}$$

$$A_3 = A_1(1 + d)(1 + d)(1 + i)^{n-3}$$

$$A_3 = A_1(1 + d)^2(1 + i)^{n-3}$$

Y se puede continuar hasta

$$A_n = A_1(1 + d)^{n-1}(1 + i)^{n-n}$$

$$A_n = A_1(1 + d)^{n-1}$$

De conformidad con lo anterior, estamos ante una serie geométrica de n términos, cuyo primer término es $A_n = A_1(1+i)^{n-1}$ y cuya razón es $\frac{1+d}{1+i}$, serie que en el punto n debe equivaler a $P(1+i)^n$; por lo tanto:

$$\frac{A_1(1+i)^{n-1}\left[\left(\frac{1+d}{1+i}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{1+d}{1+i}\right) - 1} = P(1+i)^n$$

$$\frac{A_1(1+i)^{n-1}\left[\left(\frac{1+d}{1+i}\right)^n - 1\right]}{d-i} = P(1+i)^n$$

$$A_1 = \frac{P(d-i)}{\left(\frac{1+d}{1+i}\right)^n - 1}$$

A_2 es $A_1 + dA_1$

$= A_1(1+d)$

$\boldsymbol{A_3}$ es $\boldsymbol{A_1(1+d) + A_1(1+d)d}$

$= \boldsymbol{A_1(1+d)(1+d)}$

$= \boldsymbol{A_1(1+d)^2}$

Y en general

$$\boldsymbol{A_j = A_1(1+d)^{j-1}}$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $\boldsymbol{A_1}$ obtenido se obtiene que:

$$A_j = \frac{P(d-i)(1+d)^{j-1}}{\left(\frac{1+d}{1+i}\right)^n - 1}$$

Modelo 6 cuota decreciente geométricamente

El modelo de cuota decreciente geométricamente es lo contario al modelo 5.

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

$$d = 10\%$$

La tabla de amortización sería la siguiente:

Tabla N° 15 modelo cuota decreciente aritméticamente

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	30.467,29	2.000,00	28.467,29	71.532,71
2	27.420,56	1.430,65	25.989,91	45.542,80
3	24.678,51	910,86	23.767,65	21.775,15
4	22.210,66	435,50	21.775,16	-0,01
	105.297,16	4.777,01	100.000,00	

Fuente: Elaboración propia

La tabla anterior muestra que cada cuota es la anterior menos el 0.10 de la misma

La fórmula para obtener cualquier cuota sería la siguiente:

$$A_j = \frac{P(d+i)(1-d)^{j-1}}{1-\left(\frac{1-d}{1+i}\right)^n}$$

$$A_1 = \frac{100.000(0.10+0.02)(1-0.10)^{1-1}}{1-\left(\frac{1-0.10}{1+0.02}\right)^4}$$

$$A_{1=}\ 30.467{,}29$$

$$A_2 = 30.467{,}29 - 0.10(30.467{,}29) = \qquad 27.420{,}56$$

$$A_3 = 27.420{,}56 - 0.10(27.420{,}56) = \qquad 24.678{,}50$$

$$A_4 = 24.678{,}50 - 0.10(24.678{,}50) = \qquad 22.210{,}65$$

Pero las varias $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{es}}$ se pueden obtener directamente usando la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$A_1 = \frac{100.000(0.10+0.02)(1-0.10)^{4-1}}{1-\left(\frac{1-0.10}{1+0.02}\right)^4}$$

$$A_{4=}\ 22.210{,}65$$

La fórmula explicitada en este modelo es la misma que la del anterior modelo, solamente que se sustituye $+\,d$ factor de crecimiento por $-\,d$, por lo tanto obtendríamos la siguiente expresión:

$$A_j = \frac{P(-d-i)(1-d)^{j-1}}{\left(\frac{1-d}{1+i}\right)^n - 1}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por -1 llegamos a la siguiente conclusión:

$$A_j = \frac{P(d+i)(1-d)^{j-1}}{1-\left(\frac{1-d}{1+i}\right)^n}$$

Modelo 7 Cuotas con crecimiento lineal periódico

Este modelo busca establecer una cuota periódica que crezca en una suma fija C cada período; por ejemplo, si el crecimiento deseado es de 5.000 cada período, entonces se obtendría lo siguiente:

$$A_2 = A_1 + 5.000$$

$$A_3 = A_2 + 5.000$$

$$A_4 = A_3 + 5.000$$

Y así sucesivamente

Lo primero en este modelo es identificar la cuota A_1 que estaría dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{Pi(1+i)^n - C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}{(1+i)^n - 1}}$$

Una cuota posterior estaría dada por:

$$\boldsymbol{A_j \ = \quad A_1 + (j-1)C}$$

Veamos un ejemplo:

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

C= 5.000

Utilizando la fórmula sería de la siguiente manera la cuota

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{100.000(0.02)(1+0.02)^4 - 5.000\left[\frac{(1+0.02)^4 - 1}{i} - 4\right]}{(1+0.02)^4 - 1}}$$

$$\boldsymbol{A_1 = \ 18.886,13}$$

$$A_2 = \ 18.886{,}13 \ + 5.000 \quad = 23.886{,}13$$

$$A_3 = \ 23.886{,}13 \ + 5.000 \quad = 28.886{,}13$$

$$A_4 = \ 28.886{,}13 \ + 5.000 \quad = 33.886{,}13$$

También hubiésemos también podido utilizar la fórmula

$$A_j = A_1 + (j-1)C$$

$$A_4 = 18.886,13 + (4-1)(5.000)$$
$$A_4 = 33.886,13$$

Los resultados anteriores podemos visualizarlos en la siguiente tabla de amortización:

Tabla N° 16 modelo cuota con crecimiento lineal periódico

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	18.886,13	2.000,00	16.386,13	83.113,87
2	23.886,13	1.662,28	22.223,85	60.890,02
3	28.886,13	1.217,80	27,668,33	33.221,69
4	33.886,13	664,43	33.221,70	-0,01
	105.544,52	5.544,51	100.000,00	

Fuente: Elaboración propia

A continuación se realizará la demostración de la fórmula de este modelo de la siguiente manera:

$$A_1 = A(1+i)^{n-1}$$

$$A_2 = (A+C)(1+i)^{n-2}$$

$$A_3 = (A+2C)(1+i)^{n-3}$$

Y así hasta que:

$$A_{n-1} = [A+(n-2)C](1+i)^{n-(n-1)}$$

$$A_{n-1} = [A+(n-2)C](1+i)$$

$$\boldsymbol{A_n = [A+(n-1)C](1+i)^{n-n}}$$

$$\boldsymbol{A_n = [A+(n-1)C](1+i)^{0}}$$

Descomponemos la serie de *Aes* en n-partes a fin de presentarla de un modo que podemos sumarla de la siguiente manera:

Tabla N° 17 Derivación fórmula modelo cuota con crecimiento lineal periódico

Serie	A_1 +	A_2+	A_3+	+….+	A_{n-1} +	A_n
1	$A(1+i)^{n-1}$	$A(1+i)^{n-2}$	$A(1+i)^{n-3}$		$A(1+i)$	$A(1+i)^0$
2		$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-3}$		$C(1+i)$	$C(1+i)^0$
3			$C(1+i)^{n-3}$		$C(1+i)$	$C(1+i)^0$
…..					…………	…………
n-1					$C(1+i)$	$C(1+i)^0$
n						$C(1+i)^0$
	$A(1+i)^{n-1}$ +	$(A+C)(1+i)^{n-2}$+	$(A+2C)(1+i)^{n-3}$+	+….+	[A-(n-2) C](1+i) + [A-(n-1) C] $(1+i)^0$	

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la tabla anterior, la suma de las n-series horizontales equivale a la suma de la serie original. Las series horizontales individualmente suman:

$$\boldsymbol{Serie_1 = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}}$$

$$\boldsymbol{Serie_2 = \frac{C[(1+i)^{n-1} - 1]}{i}}$$

$$\boldsymbol{Serie_3 = \frac{C[(1+i)^{n-2} - 1]}{i}}$$

Y así las series posteriores hasta:

$$\boldsymbol{Serie_{n-1} = \frac{C[(1+i)^2 - 1]}{i}}$$

$$\boldsymbol{Serie_n = \frac{C[(1+i) - 1]}{i}}$$

$$\boldsymbol{\frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{C}{i}\ [(1+i)^{n-1} - 1 + (1+i)^{n-2} - 1 + \cdots + (1+i)^2 - 1 + (1+i) - 1\ ]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{C}{i}\ [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) + 1 - n\ ]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{C}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

La expresión anterior debe equivaler a $\mathrm{P(1+i)^n}$, es decir:

$$\frac{\boldsymbol{A}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]}{\boldsymbol{i}}+\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{n}\right]= \mathrm{P}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

De donde:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{\boldsymbol{Pi}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{C}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{n}\right]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

$\boldsymbol{A_2} =$ sería $\boldsymbol{A_1}$ + *C*

$\boldsymbol{A_3} =$ sería $\boldsymbol{A_1}$ + *2C*

Y en general:

$$\boldsymbol{A_j} = \boldsymbol{A_1}+(\boldsymbol{j}-\mathbf{1})\boldsymbol{C}$$

Modelo 8 Cuotas con decrecimiento lineal periódico

Este modelo es inverso al modelo anterior y está dada por:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{\boldsymbol{Pi}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{C}\left[\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{n}\right]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

La otra cuota viene dada por:

$$\boldsymbol{A_j} = \boldsymbol{A_1}-(\boldsymbol{j}-\mathbf{1})\boldsymbol{C}$$

El ejemplo para este caso sería el siguiente:

$$P = 100.000$$

$$n = 4$$

$$i = 2\%$$

$$C = 5.000$$

Utilizando la fórmula sería de la siguiente manera la cuota

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{100.000(0.02)(1+0.02)^4 + 5.000\left[\frac{(1+0.02)^4 - 1}{i} - 4\right]}{(1+0.02)^4 - 1}}$$

$$\boldsymbol{A_1 = 33.638,62}$$

$$A_2 = 33.638,62 \ - 5.000 \ = 28.638,62$$

$$A_3 = 28.638,62 \ - 5.000 \ = 23.638,62$$

$$A_4 = 23.638,62 - 5.000 \ = 18.638,62$$

Estas últimas *Aes* podrían haber sido calculadas también de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A_3 = 33.638,62 - (3-1)5.000}$$

$$\boldsymbol{A_3 = 23.638,62}$$

El cuadro de amortización quedaría de la siguiente manera:

Tabla N° 18 modelo cuota con decrecimiento lineal periódico

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	33.638,62	2.000,00	31.638,62	68.361,38
2	28.638,62	1.367,23	27.271,39	41.089,99
3	23.638,62	821,80	22.816,82	18.273,17
4	18.638,62	365,46	18.273,16	0,01
	104.554,48	4.554,49	99.999,99	

Fuente: Elaboración propia

Modelo 9 cuota fija durante todo el plazo y abonos extraordinarios periódicos fijos

Este modelo se caracteriza por contar con cuotas fijas mensuales y abonos extraordinarios semestrales; sin embargo estos últimos pueden tener otra periodicidad: bimestral, trimestral anual, etc.

La nomenclatura que se va a utilizar es la siguiente

Tabla N° 19 Nomenclatura modelo cuota fija y abonos extraordinarios periódicos fijos

Variable	***Concepto***
P =	*Principal, causante, deuda o valor presente*
N =	*Número de periodos en el plazo total*
i =	*Tasa de interés del período*

Variable	***Concepto***
A =	*Cuota Fija*
B =	*Abono Extraordinario*
m=	*Número de abonos extraordinarios adicionales durante el plazo total*

Fuente: Elaboración propia

A continuación se muestra como serían conceptualmente si los abonos extraordinarios fueran trimestrales. La serie de pagos sería la siguiente:

Tabla N° 20 Comportamiento del modelo de cuotas fijas con abonos trimestrales

	A	A	$(A+B)$	A	$\ldots\ldots$	A	$(A+B)$	A	A	$(A+B)$
0	1	2	3	4		8	9	10	11	12

Fuente: elaboración propia

La fórmula que sintetiza el comportamiento del modelo es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{A}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]}{\boldsymbol{i}}+\frac{\boldsymbol{B}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}}-\mathbf{1}}=\boldsymbol{P}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$$

La fórmula citada expresa la relación entre las tres variables: A, B, y P. Establecidas dos variables, la tercera se puede hallar. Los siguientes ejemplos explicitan lo dicho anteriormente.

Veamos un ejemplo:

$$P = 100.000$$

$$n = 6$$

$$i = 3\%$$

$$\mathbf{m = 2}$$

$$\boldsymbol{A = 15.000}$$

Cuanto debe ser B o la cuota extraordinaria:

$$\frac{\mathbf{15.000[(1+0.03)^6 - 1]}}{\mathbf{0.03}} + \frac{\boldsymbol{B}\mathbf{[(1+0.03)^6 - 1]}}{\mathbf{(1+0.03)^{\frac{6}{2}} - 1}} = \mathbf{100.000(1+0.03)^6}$$

$$\mathbf{97.026,14 + 2.092727}\boldsymbol{B}\mathbf{ = 119.405,22}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{119.405,22 - 97.026,14}}{\mathbf{2.092727}}$$

$$\boldsymbol{B}\mathbf{ = 10.693,74}$$

Tabla N° 21 Tabla de amortización con abonos extraordinarios en el modelo de cuotas fijas

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	15.000,00	3.000,00	12.000,00	88.000,00

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
2	15.000,00	2.640,00	12.360,00	75.640,00
3	25.693,74	2.269,20	23.424,54	52.215,46
4	15.000,00	1.566,46	13.433,54	38.781,92
5	15.000,00	1.163,46	13.836,54	24.945,38
6	25.693,74	748,36	24.945,38	0,00
	111.387,48	11.387,48	100.000,00	

Fuente: Elaboración propia

Otro ejemplo, teniendo en cuenta el pago de la cuota fija

$$P = 100.000$$

$$n = 18$$

$$i = 3\%$$

$$\mathbf{m = 3}$$

$$\boldsymbol{B = 5.000}$$

Cuanto debe ser A o la cuota ordinaria:

$$\boldsymbol{\frac{A[(1+0.03)^{18}-1]}{0.03} + \frac{5.000[(1+0.03)^{18}-1]}{(1+0.03)^{\frac{18}{3}}-1} = 100.000(1+0.03)^{18}}$$

Es decir

$$23.41443537A + 18.099,065 = 170.243,3061$$

$$A = \frac{170.243,3061 - 18.099,065}{23.41443537}$$

$$A = 6.497,88$$

El cuadro de amortización confirma este valor de la siguiente manera:

Tabla N° 22 Tabla de amortización con abonos extraordinarios en el modelo de cuotas fijas- Cálculo de la cuota fija

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				100.000,00
1	6.497,88	3.000,00	3.497,88	96.502,12
2	6.497,88	2.895,06	3.602,82	92.899,30
3	6.497,88	2.786,98	3.710,90	89.188,40
4	6.497,88	2.675,65	3.822,23	85.366,17
5	6.497,88	2.560,99	3.936,89	81.429,28
6	11.497,88	2.442,88	9.055,00	72.374,28
7	6.497,88	2.171,23	4.326,65	68.047,63
8	6.497,88	2.041,43	4.456,45	63.591,18

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
9	6.497,88	1.907,74	4.590,14	59.001,04
10	6.497,88	1.770,03	4.727,85	54.273,19
11	6.497,88	1.628,20	4.869,68	49.403,51
12	11.497,88	1.482,11	10.015,77	39.387,74
13	6.497,88	1.181,63	5.316,25	34.071,49
14	6.497,88	1.022,14	5.475,74	28.595,75
15	6.497,88	857,87	5.640,01	22.955,74
16	6.497,88	688,67	5.809,21	17.146,53
17	6.497,88	514,40	5.983,48	11.163,05
18	11.497,88	334,89	11.162,99	0,06
	131.961,84	31.961,90	99.999,94	

Fuente: Elaboración propia

Otro ejemplo para en el modelo de cuota fija y abonos extraordinarios para el cálculo del valor de la deuda es el siguiente:

$$P = ?$$

$$n = 12$$

$$i = 3\%$$

$$\mathbf{m = 4}$$

$$\boldsymbol{B = 10.000}$$

$$\boldsymbol{A = 2.000}$$

$$\frac{\mathbf{2.000[(1+0.03)^{12}-1]}}{\mathbf{0.03}}+\frac{\mathbf{10.000[(1+0.03)^{12}-1]}}{\mathbf{(1+0.03)^{\frac{12}{4}}-1}}=\boldsymbol{P}\mathbf{(1+0.03)^{12}}$$

Es decir

$$\mathbf{28.384.059 + 45.915,52 = 1.425760887P}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathbf{28.384,05912 - 45.915,5248}}{\mathbf{1.425760887}}$$

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{52.112,23}$$

El cuadro de amortización confirma este valor de la siguiente manera:

Tabla N° 23 Tabla de amortización con abonos extraordinarios en el modelo de cuotas fijas- Cálculo del valor de la deuda

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
0				52.112,23
1	2.000,00	1.563,37	436,53	51.675,60
2	2.000,00	1.550,27	449,73	51.225,87
3	12.000,00	1.536,78	10.463,22	40.762,65

J	A_j	*Intereses*	*Abono*	*Saldo*
4	2.000,00	1.222,88	777,12	39.985,53
5	2.000,00	1.199,57	800,43	39.185,10
6	12.000,00	1.175,55	10.824,45	28.360,65
7	2.000,00	850,82	1.149,18	27.211,47
8	2.000,00	816,34	1.183,66	26.027,81
9	12.000,00	780,83	11.219,17	14.808,64
10	2.000,00	444,26	1.555,74	13.252,90
11	2.000,00	307,59	1.602,41	11.650,49
12	12.000,00	349,51	11.650,49	0,00
	64.000,00	11.887,77	52.112,23	

Fuente: Elaboración propia

La derivación de la fórmula es sencilla, simplemente se trata de la suma de dos series en el punto n: las series de las Aes y la serie de las Bes.

La suma de las Aes es:

$$\boldsymbol{\frac{A[(1+i)^n-1]}{i}}$$

la serie de las Bes:

$$\left[\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{2n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{3n}{m}}+\ \boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{mn}{m}}\right]$$

$$=\left[\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{2n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{3n}{m}}+\mathbf{1}\right]$$

$$=\left[\mathbf{1}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{3n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{2n}{m}}+\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n-\frac{n}{m}}\right]$$

$$=\boldsymbol{B}\,\frac{\left[((\mathbf{1}+\boldsymbol{i})\,\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}})^{m}-\mathbf{1}\right]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{n}{m}}-\mathbf{1}}$$

$$=\boldsymbol{B}\,\frac{[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n}-\mathbf{1}]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{n}{m}}-\mathbf{1}}$$

También en el punto n el principal P vale $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n}$

$$\frac{\boldsymbol{A}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n}-\mathbf{1}]}{\boldsymbol{i}}+\frac{\boldsymbol{B}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n}-\mathbf{1}]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{n}{m}}-\mathbf{1}}=\boldsymbol{P}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{n}$$

CONCLUSIONES

Cuando se aborda el estudio de las tasas de interés se mira descontextualizado sin que exista una mirada integral de su concepto que va desde la visión teórica hasta llegar a los mercados en donde se hace explicito su interpretación.

La visión clásica, neoclásica, keynesiana, postkeynesiana así como la mirada neoliberal del concepto tasa de interés se puede sintetizar de la siguiente manera:

Tabla Nº 23 Modelo Consumo hoy y futuro

VISION	MODELO CONSUMO HOY					MODELO CONSUMO FUTURO				
	P= 100 i= 2% mensual n= 3 meses					P= 100 i= 2% mensual n= 3 meses				
PRAXIS FINANCIERA	n	C_o	Intereses Causados	Intereses Pagados	C_f	n	P	Intereses Causados	Abonos a Capital	F
	0	100				0	100			100
	1	100	2	2		1	100	2	2	102
	2	100	2	2		2	100	2	2	104,04
	3	100	2	2	100	3	100	2	2	106,121
	$C_f = C_o$ + Algo (Intereses causados) C_f = 100+ 6 = 106					$F = P + I$ $F = 100 + 6{,}12$= 106,12				

	$r = I/C_o$ $r = \frac{6}{100} = 6\%\ trimestral$	$r = I/F$ $r = \frac{6,12}{100} = 6,12\%\ trimestral$
ENFOQUE FINANCIERA	**TASA NOMINAL**	**TASA FECTIVA**
ENFOQUE MATEMATICO	**PROPORCIONAL**	**EQUIVALENCIA**
	MULTIPLICACION Y DIVISIÓN (* /)	POTENCIACIÓN (^)

Fuente: Elaboración propia

La integración teórica con la práctica permite visualizar cual es la aplicación que la dan los mercados a los dos conceptos (tasa nominal y tasa efectiva) en el mercado ya sea desde una mirada microeconómica : Visión neoclásica y clásica (concepto tasa nominal: proporción) a una mirada Keynesiana y postkeyesiana a la tasa de interés (concepto equivalencia).

De otro lado, el concepto de tasa de interés a nivel internacional esta muy referido al comportamiento de los papeles que se negocian en los mercados, es asi como, la lectura de los papeles viene implicito la tasa de interés que refleja el grado de apetito de los inversionistas; sin embargo hoy en día viene condicionado al desenvolvimiento del riesgo pais, que hoy en un mundo globalizado viene medido por los “credit default swap”[7]

[7] Credit default swap son contratos que refiere a un seguro adquirido por un inversionista que lo cubre ante un eventual riesgo de impago de un préstamo o de la compra de otro producto financiero. (Navarrete, 2017)

quienes simplemente marcan el diferencial entre los rendimiento otorgados por una pais emergente versus los rendimientos otorgados por los bonos del tesoro americano principalmente relacionado al título de vencimiento a 10 años.

Cabe resaltar que la lectura de los negocios se realiza en una visión proporcional, pero que en la toma de decisiones debe ser exponencial, ya que, en el mundo de la globalización las decisiones se realizan en la determinación del grado de equivalencia entre diferentes alternativas de inversión como los niveles de riesgo asociados a la misma, cuya información proviene del diferencial de tasa de intereses entre países principalmente con Estados Unidos (Jímenez, J & Jímenez, F, 2015) .

Adicionalmente, los modelos de amortización reflejan que la tasa de interés contribuye a en la forma como los usuarios se acercan el capital desde un punto de vista lineal o geométrico; sin embargo, el consumidor financiero debe ser consciente que existen diferentes modelos y que en la medida que decida abonar más rápido a capital será el plan que más le conviene

Finalmente, la visión de la tasa de interés permite identificar en qué lado se encuentra el inversionista; sin embargo, la lectura que realizan los inversionistas es de carácter es exponencial demarcando el derrotero de los flujos de inversión.

Bibliografía

Caloca, R & Leriche, C. (2011). *Una revisión de la teoría del consumidor: La versión de la teoría del error, 26*(61), 2-32.

Jímenez, J & Jímenez, F. (2015). *Manual de Finanzas Intyernacionales.* Sevilla: Sevilla: Iris.

Montoya, C. (2009). Keynes y Neoclásicos: Una propuesta para la salida de la crisis. *Ciencias Estratégicas, 17*(21), 89-104.

Mouliá, P; Lazzari, L & Eriz, M. (2009). Herramientas matemáticas innovadoras para la maximización de la utilidad. *Cuadernillos de Cimbage*, 1-24.

Navarrete, A. (2017). *Riesgo de crédito y credit default swaps (CDS).* Sevilla: Universidad de Sevilla.

Ospina, G & Torres, A. (2009). Una revisión de los principales desarrollos de la teoría neoclásica en las últimas décadas y sius perspectivas. *Revista Académica e Institucional de la UCPR*, 1-22. Obtenido de file:///C:/Users/Hp/Downloads/Dialnet-UnaRevisionDeLosPrincipalesDesarrollosDeLaTeoriaEc-3642507.pdf

Perloff, J & Moreno, Y. (2004). *Microeconomía.* España: Pearson.